

PCurve - Curve on Surface

eryar@163.com

Abstract. 本文通过给出曲面上曲线 PCurve 的定义来对 OpenCascade 中的 Curve On Surface 进行理解，并介绍了 OpenCascade 对应的类 BRep_CurveOnSurface 实现。通过 Tcl 脚本输出的球的拓扑信息，分析 PCurve 的实际应用。

Key words. OpenCascade, ACIS, PCurve, Curve on Surface, Parametric Surface

1. Introduction

不管是 ACIS 还是 OpenCascade 中都有 PCurve 这个概念，字面上来理解就是参数曲线 (Parametric Curve)。在《基于 ACIS 的几何造型技术与系统开发》中也看到这个概念，如下图所示：

ACIS 实体		
实 体	组 成	表 示 内 容
体 (BODY)	块 (LUMP) 或线 (WIRE) 的集合	ACIS 中最高级的实体，可以是一维、二维和三维的，完全或不完整的形状
块 (LUMP)	壳 (SHELL) 的集合	在体中不与其他部分相连的区域
壳 (SHELL)	面 (FACE) 和/或线 (WIRE) 的集合	块的外部或者内部的边界面
面 (FACE)	一个表面和零个或多个环的集合	某个表面的一部分
环 (LOOP)	有向边 (COEDGE) 的列表	面的边界连通部分，可以是开环或闭环
有向边 (COEDGE)	边 (EDGE) 或空间中的样条曲线 (PCURVE)	记录一个边在某个面的边界中出现的情况
顶点 (VERTEX)	点 (APOINT)	边的边界
边 (EDGE)	有向边 (COEDGE) 的集合，两个顶点 (VERTEX) 和一个曲线 (CURVE)	通过连接信息将模型连接在一起，由两个或多个面的交线组成
线 (WIRE)	边 (EDGE) 的集合	一些连续边，这些边不附着在面上，而且不包含体积
曲面 (SURFACE)	几何定义	面的形状
曲线 (CURVE)	几何定义	线的形状
点 (APOINT)	(x, y, z) 表示的位置	顶点的位置
直线 (STRAIGHT)	解析曲线中的直线	曲线的特例
椭圆 (ELLIPSE)	解析曲线	曲线的特例
插值曲线 (INTCURVE)	插值曲线	没有显示方程的一种曲线
样条曲线 (PCURVE)	在 (u, v) 空间的样条曲线	样条曲面上的参数曲线，它定义了有向边的形状
球面 (SPHERE)	解析曲面	曲面的特例

Figure 1.1 PCurve Entity of ACIS

“参数空间曲线是在参数曲面的双参数空间中的二维样条曲线。类 pcurve 是附加在参数曲面之间公共边上的数据结构。”看完之后，对 pcurve 的概念还是不太清楚。本文给出 PCurve 的定义，并介绍 PCurve 在 OpenCascade 中的实现。根据定义可以对 PCurve 有个基本认识。

2. Definition of PCurve

PCurve 为表面上的曲线 (Curve on Surface)，其定义为：设曲面方程为

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad u, v \in [0, 1]$$

令参数 u, v 又是另一参数 t 的函数，即

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

将其代入曲面方程，得到：

$$r = r(u(t), v(t)) = (x(t), y(t), z(t))$$

当 t 变化时，就得到表面上的一条单参数曲线，称为表面上的曲线或简称表面上曲线 (Curve on Surface)。若以 s 表示表面上曲线的弧长，则由复合函数的求导公式可得弧长微分公式：

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (dr)^2 = (r_u du + r_v dv)^2 \\ &= r_u^2 (du)^2 + 2r_u r_v dudv + r_v^2 (dv)^2 \end{aligned}$$

令：

$$r_u^2 = E \quad r_u r_v = F \quad r_v^2 = G$$

则有：

$$(ds)^2 = E(du)^2 + 2F \cdot dudv + G(dv)^2$$

在古典微分几何中，上式称为曲面的第一基本公式， E, F, G 称为第一基本量。在表面上，每一点的第一基本量与参数化无关，在整张表面上，第一基本量是参数 u 和 v 的连续函数。读者注意，弧元 ds 是曲线的几何不变量，与曲面的参数化无关。关于曲线曲面更多的信息，请参考《微分几何》、《计算几何》之类的书籍。本文主要为了理解表面上曲线 PCurve 的概念及其在 OpenCascade 中的实现。

目前对 PCurve 的应用还不太清楚，但是微分几何中引入这个概念肯定是有他的意义，就像在程序设计中引入 Pimpl (pointer to implementation) 这个 idiom。尽管引入 Pimpl idiom 会增加内存的额外开销，甚至因为增加了间接层使程序代码变得不易读和不好调试，但是人们仍然乐于使用。站在 API 设计者的角度，它能隐藏信息、降低耦合、减少文件间的依赖，加快编译速度、且可使生成的库的兼容性更好等等，很多优点。所以在《Effective C++》和《API Design for C++》中，作者反复提到并使用 Pimpl idiom。类比微分几何引入的 PCurve，先在此做上标记，如果有了新的理解再做分析。

3. PCurve in OpenCascade

在 OpenCascade 中对应于曲面上曲线 PCurve 的类是 BRep_CurveOnSurface，其文档中的说明为：Representation of a curve by a curve in the parametric space of a surface.

结合定义上面这句话就好理解了。现摘抄部分代码来分析 PCurve 的定义和使用：

```
//=====
//function : BRep_CurveOnSurface
//=====
BRep_CurveOnSurface::BRep_CurveOnSurface(const Handle(Geom2d_Curve)& PC,
                                         const Handle(Geom_Surface)& S,
                                         const TopLoc_Location& L) :
    BRep_GCurve(L, PC->FirstParameter(), PC->LastParameter()),
    myPCurve(PC),
    mySurface(S)
{
}
//=====
//function : D0
//=====
void BRep_CurveOnSurface::D0(const Standard_Real U, gp_Pnt& P) const
{
    // should be D0 NYI
    gp_Pnt2d P2d = myPCurve->Value(U);
    P = mySurface->Value(P2d.X(), P2d.Y());
    P.Transform(myLocation.Transformation());
}
//=====
```

从其构造函数来看，要生成一个 PCurve 必须有曲线 PC 和曲面 S 及位置 L。

从求 PCurve 的零次微分的函数 D0 可以看出，只需要一个参数 U 就可以计算出曲面上的点 P。结合前面介绍的 PCurve 的定义，不难理解这段代码的意义。下面通过分析球面的拓扑结构，看看 PCurve 的应用。

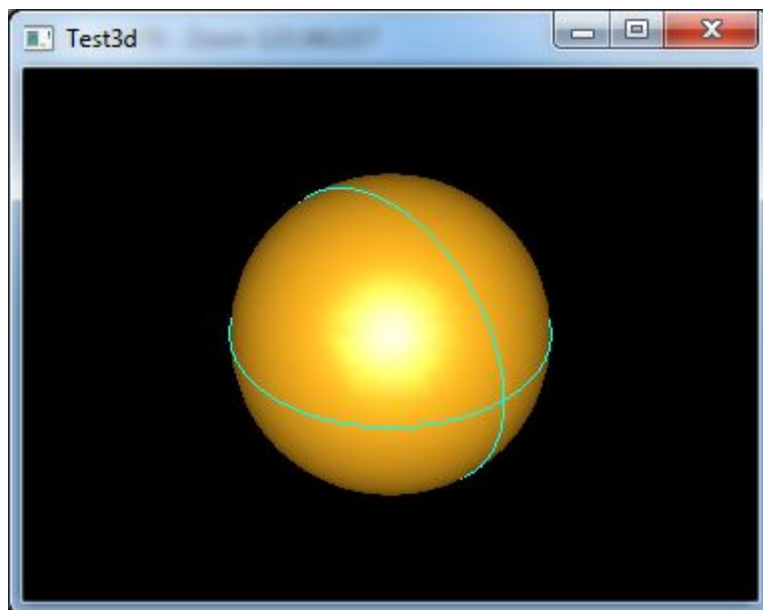


Figure 3.1 Sphere in Draw Test Harness

4. Code Demo

下面的程序生成一个球，再把其拓扑结构显示出来，可以看到其中就有 PCurve 的信息。使用 Tcl 脚本程序示例如下：

```
pload ALL
psphere s 1.0
dump s
```

以上 Tcl 脚本在 OpenCascade 的 Draw Test Harness 中运行结果如下所示：

```
Draw Test Harness
Hint: use "pload ALL" command to load standard commands
Draw[1]> pload ALL
1
Draw[2]> psphere s 1.0
Draw[3]> dump s

***** Dump of s *****
Shape : 9, FORWARD

Dump of 9 TShapes
-----

Flags : Free, Modified, Checked, Orientable, Closed, Infinite, Convex

TShape # 1 : SOLID      1100100 036B9D30
+2

TShape # 2 : SHELL     0101100 036B9D70
+3

TShape # 3 : FACE      0111000 0364BB48
+4
Tolerance : 1e-007
- Surface : 1

TShape # 4 : WIRE      0101000 036B9D50
-8 +6 +5 -6

TShape # 5 : EDGE      0101100 0364BBB8
+7 -7
Tolerance : 1e-007
same parametrisation of curves
same range on curves
degenerated
- PCurve : 4 on surface 1, range : 0 6.28318530717959
UU Points : 0, -1.5707963267949 6.28318530717959, -1.5707963267949

TShape # 6 : EDGE      0101000 0364BB80
-9 +7
Tolerance : 1e-007
same parametrisation of curves
```

Figure 4.1 PCurve in Sphere

由上图可知，球的 Edge5 由一个 PCurve 来表示。曲面上曲线 PCurve 在拓扑结构输出的信息位于 Curve2ds 中，曲面的几何数据位于 surfaces 中，分别如下图所示：

```
Draw Test Harness
-----
Dump of 4 Curve2ds
-----
1 : Line
Origin :0, 1.5707963267949
Axis  :1, 0

2 : Line
Origin :6.28318530717959, -6.28318530717959
Axis  :0, 1

3 : Line
Origin :0, -6.28318530717959
Axis  :0, 1

4 : Line
Origin :0, -1.5707963267949
Axis  :1, 0
PCurve 4
```

Figure 4.2 PCurves of Sphere

PCurve 编号为 4 的是条直线，起点 $(0, -1.570796)$ ，方向为 $(1, 0)$ 即 X 方向。

```
Draw Test Harness
-----
Dump of 1 surfaces
-----
1 : SphericalSurface
Center :0, 0, 0
Axis  :0, 0, 1
XAxis :1, 0, -0
YAxis :-0, 1, 0
Radius :1
Surface 1

-----
Dump of 0 Triangulations
-----

-----
Dump of 0 Locations
-----
```

Figure 4.3 Surfaces of Sphere

曲面编号为 1 的是一个球面，圆心 $(0, 0, 0)$ ，半径为 1，坐标系与世界坐标系相同。结合 PCurve 4 和曲面 1 及 PCurve 的参数范围，可以计算出曲面上的一条曲线上的坐标值。不过上面球面的例子中的 Edge 是 degenerated 边，退化成一个点了。由上面球的拓扑信息可知，在理解了参数曲线曲面（有向性）、奇点（Singular Point），参数曲面的奇异性（Singularity）、曲面上曲线（PCurve）等概念后，OpenCascade 的拓扑结构就可以基本理解了。

5. Conclusions

本文通过给出曲面上曲线 PCurve 的定义来对 OpenCascade 中的 Curve On Surface 进行理解，并介绍了 OpenCascade 对应的类 BRep_CurveOnSurface 实现。

通过 Tcl 脚本输出的球的拓扑信息，看看 PCurve 的实际应用，从中可以看出使用 Tcl 的简单与便捷。

6. References

1. 朱心雄，自由曲线曲面造型技术，科学出版社，2000
2. 王仁宏 李崇君 朱春钢，计算几何教程，科学出版社，2008
3. 陈维桓，微分几何，北京大学出版社，2006
4. 詹海生 李广鑫 马志欣，基于 ACIS 的几何造型技术与系统开发，清华大学出版社，2002