# OpenCASCADE Conic to BSpline Curves-Circle

eryar@163.com

**Abstract.** The conic sections and circles play a fundamental role in CAD/CAM applications. Undoubtedly one of the greatest advantages of NURBS is their capability of precisely representing conic sections and circles, as well as free-form curves and surfaces. We assume a knowledge of conics and circles, the purpose of this paper is to study them in the framework of their representation as NURBS curves.

**Key Words.** OpenCASCADE, Conic Curves, Circle, Convert, BSpline Curve

## 1. Introduction

B 样条技术在自由曲线曲面的设计和表示方面显示出了其卓越的优点，但在表示初等曲线曲面时却遇到了麻烦。在很多应用领域，例如飞机、造船、汽车等工业中，圆弧、椭圆弧、抛物线、圆柱面、球面、圆锥面、圆环面等经常出现，这些形状都表示精确且往往要求较高的加工精度。传统的 B 样条技术只能精确地表示抛物线、抛物面，对其他的二次曲线曲面只能近似表示。因此，在一个造型系统内无法用一种统一的形式表示曲线曲面，因而使得系统的开发复杂化。非均匀有理 B 样条（NURBS）技术正是在这样的需求背景下逐步发展成熟起来的。

NURBS 曲线曲面能够迅速接受的主要原因在于：

- NURBS 技术可以精确表示规则曲线与曲面（如圆锥曲线、二次曲面、旋转曲面等）。
- 可以把规则曲线曲面和自由曲线曲面统一起来表示。因而便于用统一的算法进行处理和使用统一的数据库进行存储，程序量可明显减少；
- 由于增加了额外的自由度（权因子），若应用得当，有利于曲线曲面形状的控制和修改。
- NURBS 技术是非有理 Bezier 曲线的和 B 样条形式的真正推广；

本文主要介绍圆的 NURBS 表示方法，即如何将圆转换为 NURBS 曲线。

## 2. The Effect of Multiple Knots (Multiplicity)

重节点的定义为在节点序列中顺序 r 个节点相同或 xi 重复出现 r 次，称为该节点 xi 具有重复度 r（Multiplicity）。在 OpenCASCADE 中 B 样条曲线类的构造就是用的节点 Knots 及其对应的重复度 Multiplicities 来实现的，如下所示：

```
  //!  Creates a  non-rational B_spline curve   on  the <br>
//!         basis <Knots, Multiplicities> of degree <Degree>. <br>
  Standard_EXPORT     Geom_BSplineCurve(const  TColgp_Array1OfPnt&  Poles,const
TColStd_Array1OfReal& Knots,const TColStd_Array1OfInteger& Multiplicities,const
Standard_Integer Degree,const Standard_Boolean Periodic = Standard_False);
```

重节点有如下重要性质：

- 重节点连续阶性质。在每个节点区间(uj, uj+1)内部，Bi,p(u)为多项式函数，因此，所有导数存在。在一个节点 uj 处 Bi,p(u)是 p-mj 次连续可微的，此处 mj 是该点的重数。所以增加次数，则增加连续性，而增加节点的重数，则降低连续性。通常为保证连续性，节点的最高重数为 p；
- 重节点的插值基函数性质。当节点向量中的内节点 uj 的重数为 p，则只有定义在 $\left\{u_{j-1},\underbrace{u_j,\cdots,u_j}_{p},u_{j+1}\right\}$ 上的基函数在 uj 上取值为 1，其余基函数在 uj 取值为 0。当节点向是中的端节点 uj 的重数为 p+1，则只有定义在 $\left\{u_{j-1},\underbrace{u_j,\cdots,u_j}_{p+1}\right\}-or-\left\{\underbrace{u_j,\cdots,u_j}_{p+1},u_{j+1}\right\}$ 上的基函数在 uj 取值为 1，其余基函数在 uj 取值为 0。

如下图所示为具有重节点的 B 样条基函数：

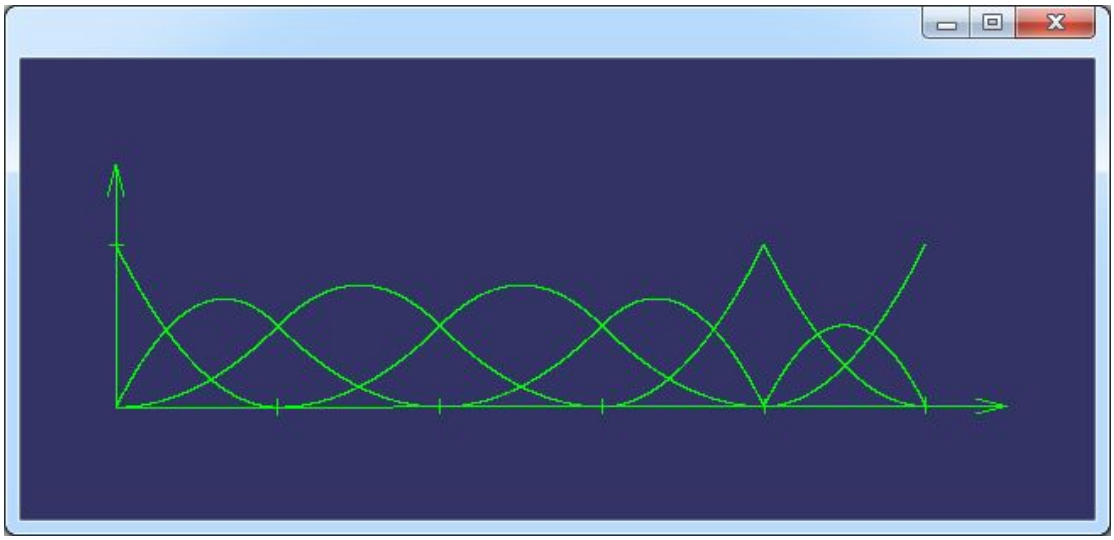


Figure 2.1 U={0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5} p = 2 B-spline Basis Function

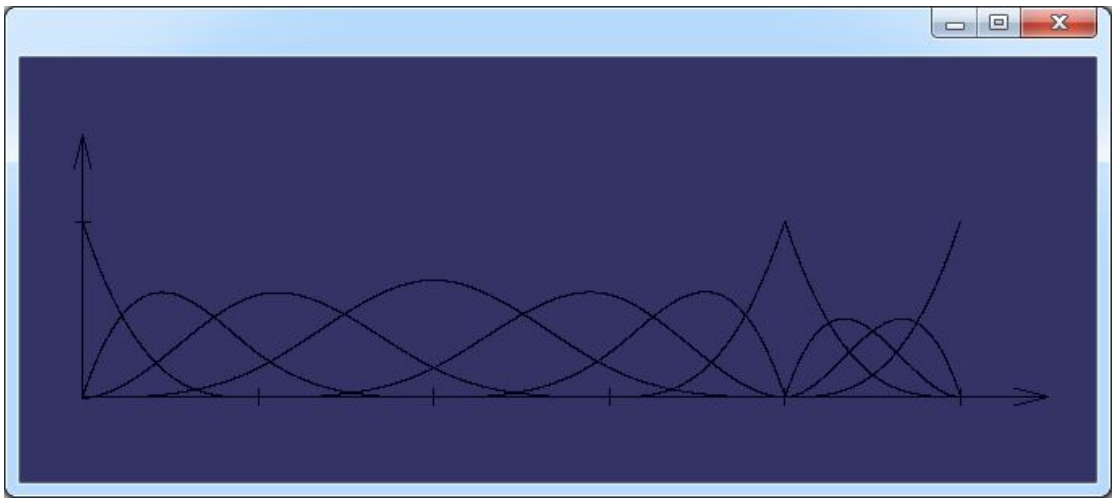


Figure 2.2 U={0, 0, 0, 0,1, 2, 3, 4, 4,4, 5, 5, 5,5} p = 3 B-spline Basis Function

由上图可知，重节点的出现对 B 样条曲线有影响，如下所述：

当节点向量内部某节点的重数与次数相同时，则 B 样条基数在此节点处的值为 1，即由此得到的 B 样条曲线的控制顶点将与 B 样条曲线上的点重合。所以利用重节点的插值性质可以在 B 样条曲线内部构造尖点与尖角。

当端节点重数为 p 时，p 次的 B 样条曲线的端点将与相应的控制多边形的端点相重，曲线在端节点处与控制多边形相切。

当端节点重数为 p+1 时，p 次 B 样条曲线就具有与 p 次 Bezier 曲线相同的端点几何性质。这时如果 B 样条曲线的定义域仅有一个非零节点区间，则所定义的 B 样条曲线就是 Bezier 曲线。由此可知，B 样条方法是 Bezier 方法的强有力的推广。

理解重节点的作用非常重要，利用重节点技术可用来控制 B 样条基以达到控制整条曲线在节点处的连续性的目的。

## 3. Construction of Circles

如前所述，NURBS 技术是 Bezier 技术的推广。实际上，有理 Bezier 技术就可精确地表示圆锥曲线。由有理 Bezier 曲线的公式得二次有理 Bezier 曲线弧的表示形式为：

$$C(u)=\frac{(1-u)^2\omega_0P_0+2u(1-u)\omega_1P_1+u^2\omega_2P_2}{(1-u)^2\omega_0+2u(1-u)\omega_1+u^2\omega_2}\qquad u\in[0,1]$$

称 k 为形状不变因子，公式如下所示：

$$k=\frac{\omega_0\omega_2}{\omega_1^2}$$

一段小于 180 度的圆弧也可以用二次有理 Bezier 曲线来表示。由于对称性，P0P1P2 必须是一个等腰三角形，满足 P0P1=P1P2，计算得 ω1＝cos( θ )。

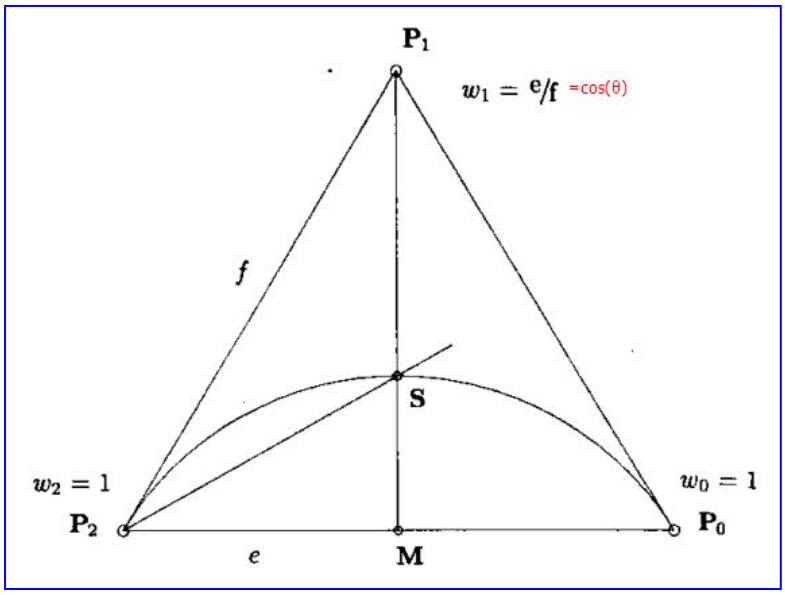



Figure 3.1 圆心角度小于 180 度圆弧的二次有理 Bezier 表示

大于 180 度的圆弧可以使用多段小圆弧拼接而成。得用重节点技术，使多段圆弧拼接起来。重节点的一种方法是使用 2 重节点，在有 i 段圆弧时，其内部节点值可取为 1/i，…，i-1/i，权因子的取法不变。

以 180 度的圆弧为例，可以使用两段 90 度圆弧拼接而成。节点矢量可取为 U＝{0，0，0，1/2，1/2，1，1，1}。权因子可以取为 ω1＝ω3＝cos45， ω0＝ω2＝ω4＝1。则对应的 B 样条基函数及 B 样条曲线如下图所示：

由图可知基函数在 1/2 处取值为 1，则对应的 B 样条曲线上的值与控制顶点重合。

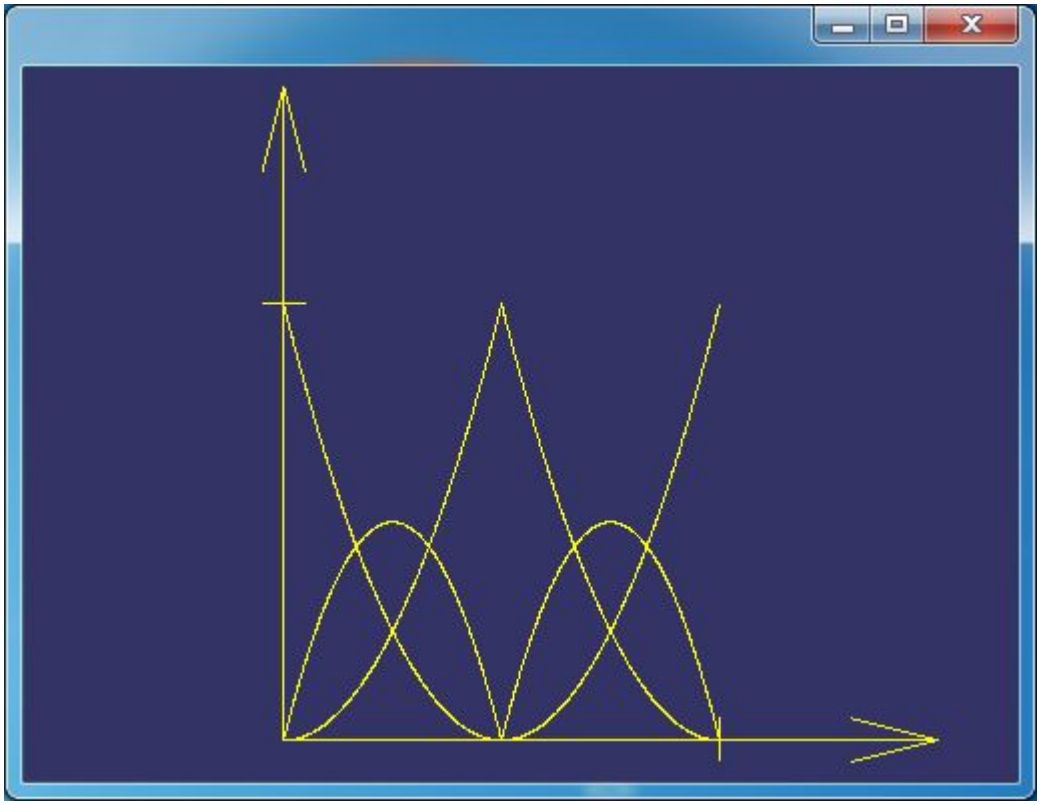


Figure 3.2 U＝{0，0，0，1/2，1/2，1，1，1} B Spline Basis

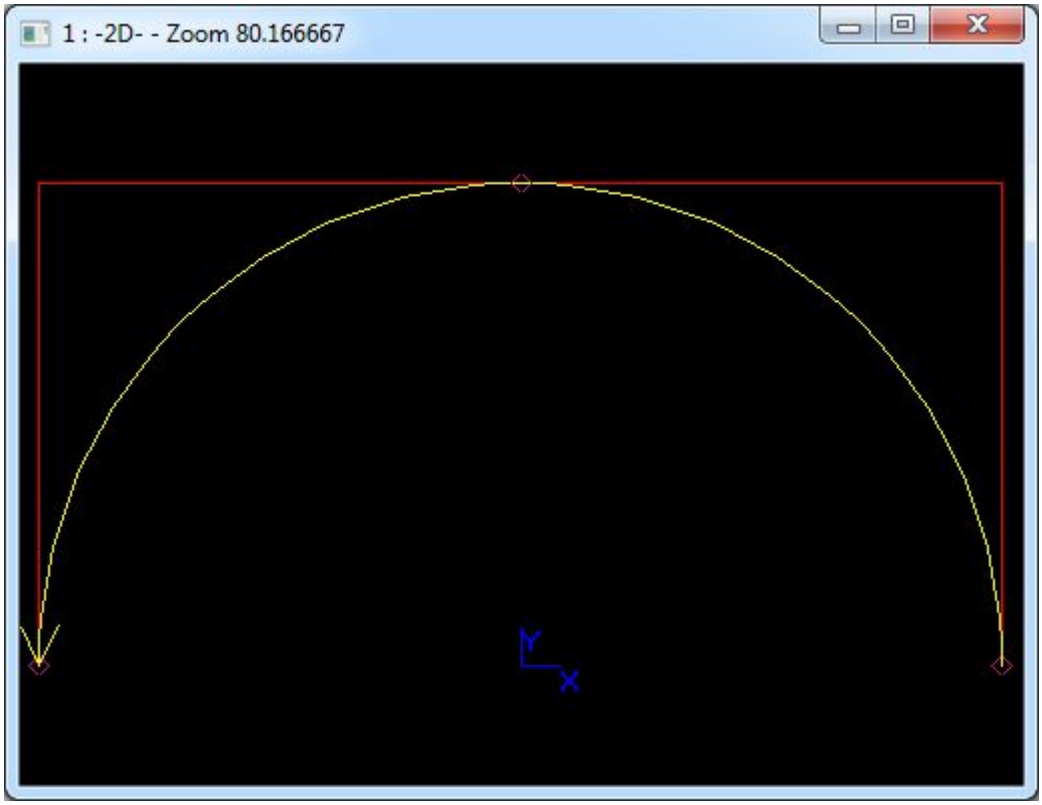



Figure 3.3 Semi-Circle B Spline Curve

用四段圆弧组成一个整圆，节点矢量为 U＝{0，0，0，1/4，1/4，2/4，2/4，3/4，3/4，1，1，1}，权因子取{1，sqrt(2)/2，1，1，sqrt(2)/2，1，1，sqrt(2)/2，1}，使用 Tcl 脚本在

Draw Test Harness 中显示如下图所示：

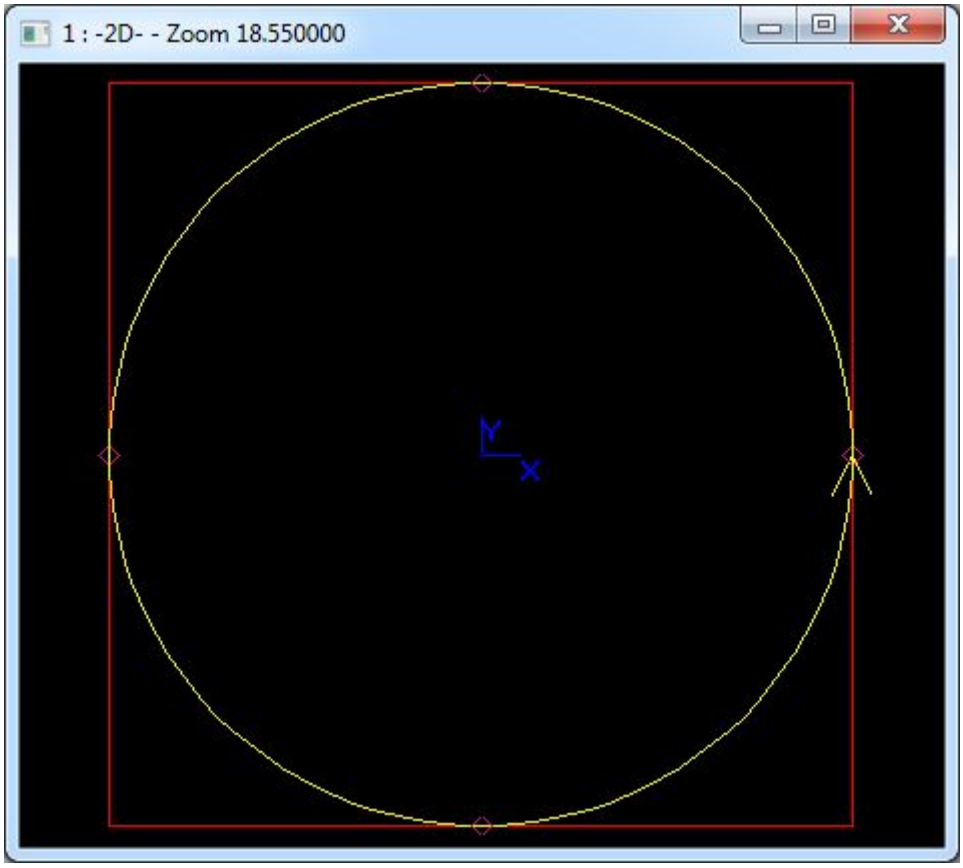



Figure 3.4 A Circle represented by 4 arcs

Tcl 代码如下所示：

```
#
#    Copyright (c) 2014 eryar All Rights Reserved.
#
#        File    : colorscale.tcl
#        Author  : eryar@163.com
#        Date    : 2014-10-13 18:10
#        Version : 1.0v
#
#    Description : Demonstrate the rational 2d Bezier curve
#                  and BSpline curve.
#

pload MODELING

# use 4 arc to composite a circle
2dbsplinecurve c2 2 \
 5 0 3 1/4 2 2/4 2 3/4 2 1 3 \
 10 0 1 \
 10 10 sqrt(2.0)/2.0 \
 0 10 1 \
 -10 10 sqrt(2.0)/2.0 \
 -10 0 1 \
 -10 -10 sqrt(2.0)/2.0 \
```

```
 0 -10 1 \
 10 -10 sqrt(2.0)/2.0 \
 10 0 1

# fit the 2d view
v2d
2dfit
```

也可用位于三角形上的控制点来表示圆，如下图所示：

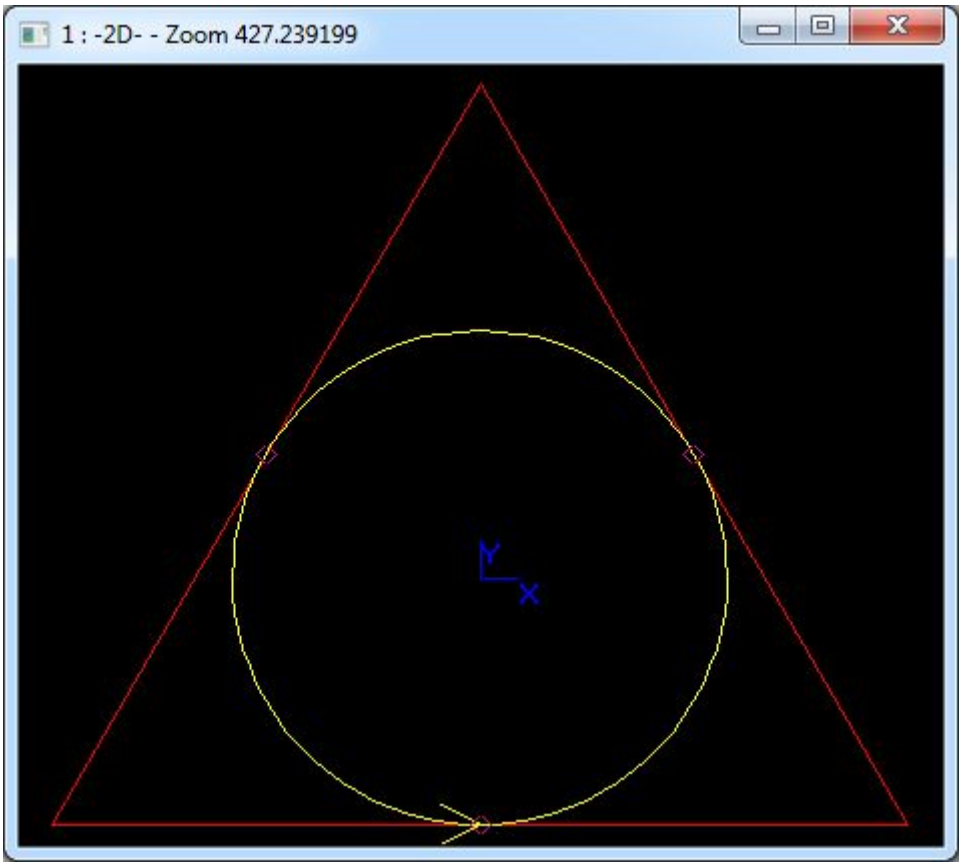



Figure 3.5 A Circle represented by 3 arcs

相应的 Tcl 代码如下所示：

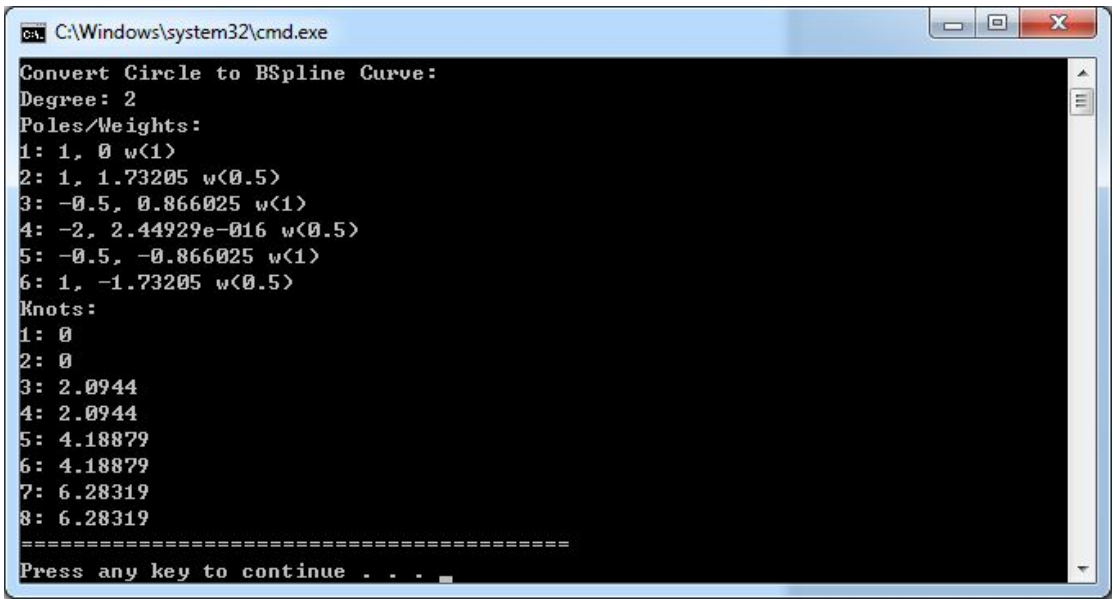
```
pload MODELING
# a 2d periodic circle (parameter from 0 to 2*pi !!)
dset h sqrt(3)/2
2dpbsplinecurve c3 2 \
4 0 2 pi/1.5 2 pi/0.75 2 2*pi 2 \
0 -h/3 1 \
0.5 -h/3 0.5 \
0.25 h/6 1 \
0 2*h/3 0.5 \
-0.25 h/6 1 \
-0.5 -h/3 0.5 \
0 -h/3 1
# fit the 2d view
v2d
2dfit
```

## 4. Code Analysis

OpenCASCADE 中提供了将圆转换为 NURBS 曲线的功能，转换后得到的 NURBS 曲线的参数范围不再是[0，1]。下面给出具体的实例：

```
void TestCircleConvert(void)
{
    gp_Circ2d aCircle;
    aCircle.SetRadius(1.0);
    Convert_ParameterisationType aType = Convert_TgtThetaOver2;
    Convert_CircleToBSplineCurve aConvertor(aCircle, aType);

    Handle_Geom_Circle aGeomCircle = GC_MakeCircle(gp::XOY(), 1.0);
    Handle_Geom_BSplineCurve aBSplineCurve =
      GeomConvert::CurveToBSplineCurve(aGeomCircle, aType);

    std::cout << "Convert Circle to BSpline Curve: " << std::endl;
    DumpConvertorInfo(aConvertor);
}

int main(int argc, char* argv[])
{
    TestCircleConvert();

    return 0;
}
```

结果如下图所示：




由上述结果可知，在默认参数化的情况下是按三段圆弧来拼接成一个整圆的。也可指定不同的参数化类型，将会得到不同的 NURBS 曲线。次数也可能不是 2 次，会用高次的 NURBS 曲线来表示圆。

## 5. Conclusion

利用重节点技术及二次有理 B 样条的性质，可以用 NURBS 来精确表示圆。选择不同的控制顶点，得到的圆的参数化效果也有所不同。

将常用的圆锥曲线用 NURBS 曲线来表示，即说明可以用 NURBS 曲线来统一表示圆锥曲线及自由曲线。这说明在理论上，一个造型内核的曲线可以只用一个类来表示，这个类对应 OpenCASCADE 中的 Geom_BSplineCurve。

使用 Tcl 可以在 Draw Test Harness 中方便地产生 NURBS 曲线，从而可以快速验证一些算法的正确性。

## 6. References


1. 赵罡，穆国旺，王拉柱译 Les Piegl，Wayne Tiller The NURBS Book(Second Edition) ***2010*** 清华大学出版社
2. 莫容，常智勇 计算机辅助几何造型技术 ***2009*** 科学出版社
3. 朱心雄等，自由曲线曲面造型技术，2000，科学出版社
4. Kelly Dempski, Focus on Curves and Surface, 2003, Premier Press
5. 王仁宏，李崇君，朱春钢 计算几何教程 ***2008*** 科学出版社