

OpenCASCADE 3 Planes Intersection

eryar@163.com

Abstract. OpenCASCADE provides the algorithm to search the intersection point between 3 planes. If two of the planes are parallel or identical, will get no result.

Key Words. Plane Intersection

1.Introduction

由《高等数学》可知，如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的**法向量**。平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直。即平面上任一向量与法向量的点乘为 0.

$$n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

其中 n 为平面的法向量， M_0M 为平面上任两点表示的向量。此式是平面的点法式方程。

由于平面的点法式方程是 x,y,z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及法向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示。

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 x,y,z 的系数就是该平面的一个法向量，即 $n=\{A,B,C\}$ 。上式就是平面的一般方程。设三个平面的方程分别为：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

上述三个平面恰交于一点的充分必要条件是方程组有唯一解，即它的系数行列式不等于零：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

所以求三个平面交点的算法核心是对系数方程组的求解。

2.Algorithm

OpenCASCADE 中也有计算三个平面交点的算法，使用类 `IntAna_Int3Pln`。也是使用了直接的算法，即先根据平面的点法式方程计算出平面的一般式，再联立方程组，最后使用高斯 Gauss 消元法进行求解。其核心代码如下所示：

```
void IntAna_Int3Pln::Perform (const gp_Pln& P1, const gp_Pln& P2,
                             const gp_Pln& P3) {

done=Standard_False;
math_Matrix M(1,3,1,3);
math_Vector V(1,3);

P1.Coefficients (M(1,1),M(1,2),M(1,3),V(1));
P2.Coefficients (M(2,1),M(2,2),M(2,3),V(2));
P3.Coefficients (M(3,1),M(3,2),M(3,3),V(3));

math_Gauss Resol (M,gp::Resolution());
```

```

if (!Resol.IsDone()) {
    empt=Standard_True;
}
else {
    empt=Standard_False;
    V=-V;
    Resol.Solve(V);
    pnt.SetCoord(V(1),V(2),V(3));
}
done=Standard_True;
}

```

算法首先根据平面的点向式数据计算出一般式的参数，使用的类 `gp_Pln` 的函数 `Coefficients()`，代码如下所示：

```

inline void gp_Pln::Coefficients (Standard_Real& A,
                                   Standard_Real& B,
                                   Standard_Real& C,
                                   Standard_Real& D) const
{
    const gp_Dir& dir = pos.Direction();
    if (pos.Direct()) {
        A = dir.X();
        B = dir.Y();
        C = dir.Z();
    }
    else {
        A = -dir.X();
        B = -dir.Y();
        C = -dir.Z();
    }
    const gp_Pnt& P = pos.Location();
    D = -(A * P.X() + B * P.Y() + C * P.Z());
}

```

根据平面的一般方程的定义可知， x,y,z 的系数即为平面的法向，所以根据平面的法向量可以确定一般式的系数 A 、 B 、 C 。再代入平面上的任一点计算出 D 。

最后使用高斯 Gauss 消元法求解方程组得到三个平面的交点。

3. Conclusion

OpenCASCADE 中对三个平面的交点的计算使用了直接的算法，即联立方程组进行求解的方法。从中可以看出这些几何问题在 OpenCASCADE 中的求解也都是数学的应用题。对方程组的求解，微分、积分等数值方法更是核心中的核心，所以 OpenCASCADE 将 TKMath 放在了基础模块。