B-Spline Curve Library in Open Cascade

Open Cascade 中的 B 样条曲线库

eryar@163.com

摘要 Abstract：简要介绍 Open Cascade 中的 B 样条曲线库 BSplCLib 的使用方法，并且结合源程序来对 Open Cascade 中的 B 样条曲线的组成部分如节点矢量、重复度等概念进行介绍，以及通过对计算 B 样条基函数的算法进行分析，加深对 B 样条曲线概念的理解。

关键字 Key Word：B Spline Curve、Open Cascade、Knot Vector、Multiplicity

一、概述 Overview

1946 年由 Schoenberg 提出了 B 样条理论，给出了 B 样条的差分表达式；1972 年 de Boor 和 Cox 分别独立给出了关于 B 样条的标准算法。Gordon 和 Riesenfeld 又把 B 样条理论用于形状描述，最终提出了 B 样条方法。用 B 样条基替代了 Bernstein 基，构造出 B 样条曲线，这种方法继承了 Bezier 方法的一切优点，克服了 Bezier 方法存在的缺点，较成功地解决了局部控制问题，又轻而易举地在参数连续性基础上解决了连接问题，从而使自由曲线曲面形状的描述问题得到较好解决。

p 次 B 样条曲线的定义为：

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(u)P_i$$

其中：

- P_i 是控制顶点（control point）；
- $N_{i,p}(u)$是定义在非周期节点矢量上的 p 次 B 样条基函数；

有很多方法可以用来定义 B 样条基函数以及证明它的一些重要性质。例如，可以采用截尾幂函数的差商定义，开花定义，以及由 de Boor 和 Cox 等人提出的递推公式等来定义。我们这里采用的是递推定义方法，因为这种方法在计算机实现中是最有效的。

令 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_m\}$是一个单调不减的实数序列，即 $u_i<=u_{i+1}$，$i=0,1,\cdots,m-1$。其中，u_i 称为节点，U 称为节点矢量，用 $N_{i,p}(u)$表示第 i 个 p 次 B 样条基函数，其定义为：

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i\le u<u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)$$

B 样条基有如下性质：

a) 递推性；
b) 局部支承性；
c) 规范性；
d) 可微性；

根据 B 样条曲线定义可知，给定控制顶点 Pi（control points），曲线次数 p（degree）及节点矢量 U（knot vectors），B 样曲线也就确定。对于有理 B 样条曲线，还需要参数权重（weights）。

二、OCC 中的 B 样条曲线库 BSplCLib in OCC

在 Open Cascade 中的工具箱（Toolkit）TKMath 中的包（package）BSplCLib 是 B 样条曲线库，为 B 样条曲线曲面的计算提供了支持。它提供了三方面的功能：

- 对节点矢量（knot vectors）及重复度（multiplicities）的管理；
- 对多维样条的支持，即 B 样条方法中控制顶点的维数可以是任意维数（dimension）；
- 二维和三维样条曲线的方法；

Open Cascade 中的 B 样条曲线由下列数据项定义：

定义	变量类型	变量名称
控制顶点 control points	TColgp_Array1OfPnt	Poles
权重 weights	TColStd_Array1OfReal	Weights
节点 knots	TColStd_Array1OfReal	Knots
重数 multiplicities	TColStd_Array1OfInteger	Mults
次数 degree	Standard_Integer	Degree
周期性 periodicity	Standard_Boolean	Periodic

B 样条曲线库 BSplCLib 提供了一些基本几何算法：

- B 样条基函数及其导数的计算 BSplCLib::EvalBsplineBasis()；
- 节点插入 BSplCLib::InsertKnot()；
- 节点去除 BSplCLib::RemoveKnot()；
- 升阶 BSplCLib::IncreaseDegree()；
- 降阶；

结合《The NURBS Book》和 Open Cascade 中的 BSplCLib 的源程序，可以高效的学习 NURBS。《The NURBS Book》中有详细的理论推导及算法描述，而 Open Cascade 中有可以用来实际使用的程序。理论联系实际，有助于快速理解 NURBS 的有关概念及其应用。

三、OCC 中 B 样条曲线库的节点和重数 Knots and Multiplicity in BSplCLib

由 B 样条曲线的可微性可知，节点的重数与 B 样条曲线的连续性相关。在节点区间内部，Ni,p(u)是无限次可微的，因在每个节点区间内部，它是一个多项式。在节点处 Ni,p(u)是 p-k 次连续的，其中 k 是节点的重复度（multiplicity，有时也称为重数）。因此，增加次数 p 将提高曲线的连续性，而增加节点的重复度则使连续性降低。

重复度（multiplicity，有时也称为重数）有两种不同的理解方式：

- 节点在节点矢量中的重复度；
- 节点相对于一个特定的基函数的重复度；

在 Open Cascade 中对重复度的理解是前者，即节点在节点矢量中的重复度。下面结合源程序来进行说明。

函数 BSplCLib::Knots()用来将给定的节点矢量（节点序列 knot sequence）转换为节点的重复度不大于 *1* 的 Knots 数组和每个节点对应的重复度 Mults 数组，且数据 Knots 和 Mults 的长度必由函数 BSplCLib::KnotsLength()得到。Knots()函数的源程序如下所示：

```
//=======================================================================
//function : Knots
//purpose  : Computes  the  sequence  of knots Knots  without repetition
//           of the  knots  of multiplicity  greater than 1.
//           Length  of <Knots> and  <Mults> must be
KnotsLength(KnotSequence,Periodic).
//=======================================================================
void BSplCLib::Knots(const TColStd_Array1OfReal& SeqKnots,
        TColStd_Array1OfReal &knots,
        TColStd_Array1OfInteger &mult,
//        const Standard_Boolean Periodic)
        const Standard_Boolean )
{
  Standard_Real val = SeqKnots(1);
  Standard_Integer kk=1;
  knots(kk) = val;
  mult(kk)  = 1;

  for (Standard_Integer jj=2;jj<=SeqKnots.Length();jj++)
    {
      // test on strict equality on nodes
      if (SeqKnots(jj)!=val)
        {
          val = SeqKnots(jj);
          kk++;
          knots(kk) = val;
          mult(kk)  = 1;
        }
      else
        {
```

```
          mult(kk)++;
        }
    }
}
```

从上述代码可知，直接使用了不等于来判断两个节点的值是否相同，而没有采用误差处理，即严格的相等比较。程序将节点重复度不大于 ***1*** 的节点及其相应的重复度分别保存到 knots 和 mult 中。

四、B 样条曲线的分类 B Spline Curve Type

B 样条曲线一般按定义基函数的节点序列是否等距（均匀）分为均匀 B 样条曲线（Uniform B-Spline Curve）和非均匀 B 样条曲线（Non Uniform B-Spline Curve）。

B 样条曲线按节点序列中节点分布情况不同，又分为四种类型：均匀 B 样条曲线、准均匀 B 样条曲线、分段 Bezier 曲线、一般非均匀 B 样条曲线。设给定特征多边形顶点 Vi，i=***0***,***1***,…,n，曲线次数 k，则有：

- 均匀 B 样条曲线（uniform B-Spline curve）：节点序列中节点沿参数轴均匀或等距分布，即所有节点区间长度为大于零的常数（constant）：

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i = constant > 0, i = 0,1,\cdots,n+k$$

- 准均匀 B 样曲线（quasi-uniform B-Spline curve）：其节点序列中两端节点具有重复度 k+***1***，而所有内节点均匀分布，具有重复度 ***1***。
- 分段 Bezier 曲线（piecewise Bezier curve）：其节点序列中两端节点重复度与准均匀 B 样条曲线的相同，所不同的是所有内节点重复度为 k。
- 非均匀 B 样条曲线（general non-uniform B-Spline curve）：这是对任意分布的节点序列，只要在数学上成立，即节点序列非递减，都可取。

在基础类模块(Module FoundationClasses)的工具箱(Toolkit TKMath)中的包(GeomAbs)中有对 B 样样条曲线类型的定义，源程序如下所示：

```
//!  This enumeration is used to note specific curve form. <br>
enum GeomAbs_BSplKnotDistribution {
GeomAbs_NonUniform,
GeomAbs_Uniform,
GeomAbs_QuasiUniform,
GeomAbs_PiecewiseBezier
};
```

而类 BSplCLib 主要是用来管理节点和重复度的，所有将节点和重复度也进行了分类。根据节点矢量是否均匀分布，将节点分配方式（Knot Distribution）分为：均匀（BSplCLib_Uniform）和非均匀（BSplCLib_NonUniform）。源程序如下所示：

```
enum BSplCLib_KnotDistribution {
BSplCLib_NonUniform,
BSplCLib_Uniform
};
```

根据重复度数组将重复度的分配方式分为如下三种类型：

- BSplCLib_Constant：重复度都相同；
- BSplCLib_QuasiConstant：首、尾节点的重复度与内部节点的重复度不同；
- BSplClib_NonConstant：其它情况；

源程序如下所示：

```
enum BSplCLib_MultDistribution {
BSplCLib_NonConstant,
BSplCLib_Constant,
BSplCLib_QuasiConstant
};
```

判断节点矢量和重复度矢量类型分别由下列函数实现：

- BSplCLib::KnotForm()；
- BSplCLib::MultForm()；

具体的判断方法可以查看源程序。

将节点分布方式与重复度的分布方式进行组合，可以得出 B 样条曲线的那几种类型。

五、B 样条基函数的计算 Evaluate the B-Spline Basis

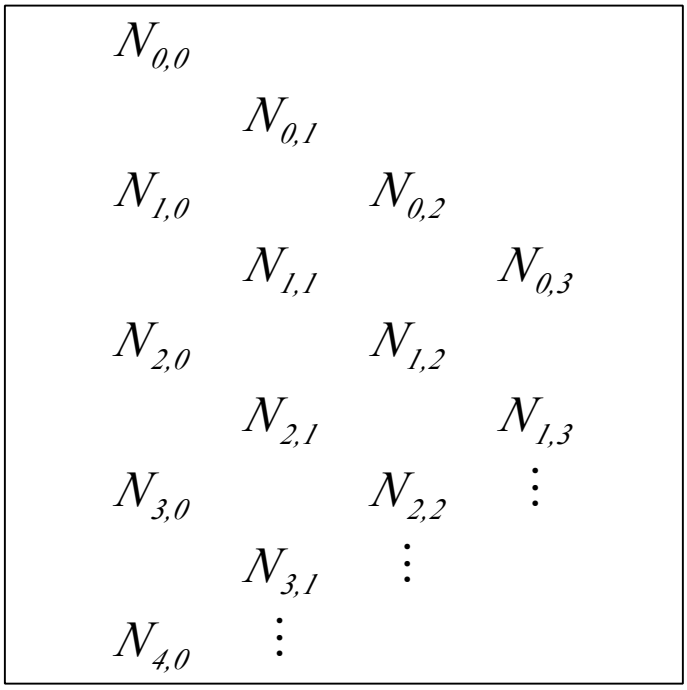
B 样条基函数的计算主要使用了 B 样条基了函数的递推公式（Cox-deBoor 公式）的局部支撑性质，如下所示：

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i \le u < u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)$$

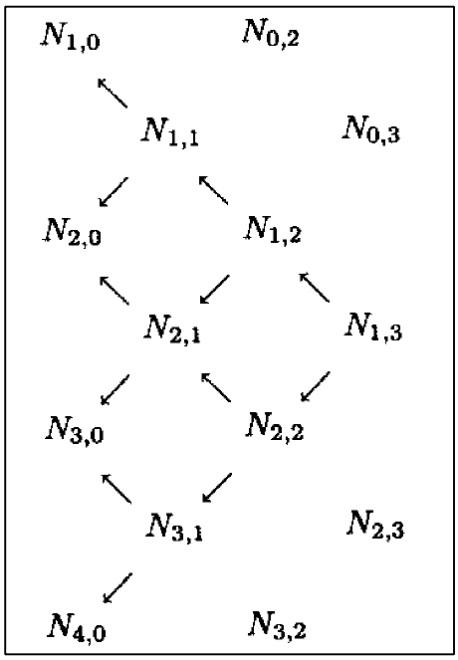
直接由定义可知：

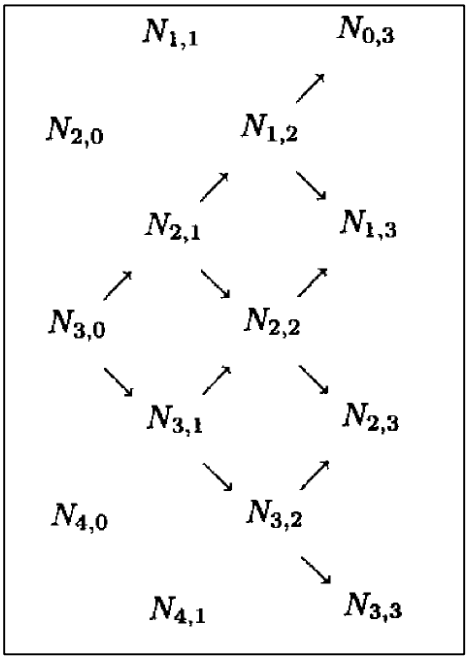
- Ni,0(u)是一个阶梯函数，它在半开区间 u∈[ui, ui+1)外都为零；
- 当次数 p>0时，Ni,p(u)是两个 p-1 次基函数的线性组合；
- 计算一组基函数需要事先指定节点矢量 U 和次数 p；
- 半开区间[ui,ui+1)称为第 i 个节点区间（knot span），它的长度可以为零，因为相邻节点可以是相同的；
- 计算 p 次基函数的过程可以生成一个如下形式的三角形陈列：



B 样条有局部支撑性，即若 u 不在区间[ui, ui+p+1)，则 Ni,p(u)=0。可从下面的三角形中看出 N1,3是 N1,0、N2,0、N3,0和 N4,0的线性组合，而 N1,0在区间[u1, u2)上非零，N2,0在区间[u2,u3)上非零，N3,0在区间[u3,u4)上非零，N4,0在区间[u4,u5)上非零，所以 N1,3仅在区间[u1,u5)上非零。

在任意给定的节点区间[uj,uj+1)内，最多有 p+1 个是非零的，它们是 Nj-p,p、Nj-p+1、…、Nj,p。例如，在[u3,u4)上，零次基函数中只有 N3,0是非零的，一次基函数只有 N2,1和 N3,1是非零的，非零的三次基函数只有 N0,3、N1,3、N2,3、N3,3。这个性质如下图所示：





上面两幅图中右边的图中所示的推算过程表明，给定节点序列 U 及 B 样条曲线的次数 p，给出任意一个 u 值，找出其所在的节点区间$[u_i,u_{i+1}]$上，最多有 $N_{i-p,p}$，$N_{i-p+1,p}$，…，$N_{i,p}$ 个非零的基函数。

例如我们根据递推公式写出二次基函数的一般形式，如下所示：

$$N_{i-2,2}(u) = \frac{u-u_{i-2}}{u_i-u_{i-2}}N_{i-2,1}(u) + \frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-1}}N_{i-1,1}(u) \qquad (2.14)$$

$$N_{i-1,2}(u) = \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+1}-u_{i-1}}N_{i-1,1}(u) + \frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_i}N_{i,1}(u) \qquad (2.15)$$

$$N_{i,2}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}N_{i,1}(u) + \frac{u_{i+3}-u}{u_{i+3}-u_{i+1}}N_{i+1,1}(u) \qquad (2.16)$$

当给定的 u 值在区间$[u_3,u_4]$上即（i=3）时，根据上面的三角形，得出下列重要结论：

$$N_{i-2,1}(u) = N_{i+1,1}(u) = 0$$

$$N_{3-2,1}(u) = N_{1,1}(u) = 0$$

$$N_{3+1,1}(u) = N_{4,1}(u) = 0$$

即这两项不需要计算。另外一个重要结论就是图中用相同颜色框中的部分是相同的，也就是下面程序中的变量 temp 表示的内容。

我们引入下面符号：

$$\text{left}\ [j] = u - u_{i+1-j}$$
$$\text{right}\ [j] = u_{i+j} - u$$

由二次基函数推出的三个公式可写为：

$$N_{i-2,2}(u) = \frac{\text{left}\ [3]}{\text{right}\ [0] + \text{left}\ [3]} N_{i-2,1}(u) + \frac{\text{right}\ [1]}{\text{right}\ [1] + \text{left}\ [2]} N_{i-1,1}(u)$$

$$N_{i-1,2}(u) = \frac{\text{left}\ [2]}{\text{right}\ [1] + \text{left}\ [2]} N_{i-1,1}(u) + \frac{\text{right}\ [2]}{\text{right}\ [2] + \text{left}\ [1]} N_{i,1}(u)$$

$$N_{i,2}(u) = \frac{\text{left}\ [1]}{\text{right}\ [2] + \text{left}\ [1]} N_{i,1}(u) + \frac{\text{right}\ [3]}{\text{right}\ [3] + \text{left}\ [0]} N_{i+1,1}(u)$$

上述推导过程为《The NURBS Book》中的算法，算法代码如下所示：

```
BasisFuns(i,u,p,U,N)
  { /*  Compute the nonvanishing basis functions  */
    /*  Input:  i,u,p,U  */
    /*  Output: N  */
  N[0]=1.0;
  for (j=1; j<=p; j++)
    {
    left[j] = u-U[i+1-j];
    right[j] = U[i+j]-u;
    saved = 0.0;
    for (r=0; r<j; r++)
      {
      temp = N[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
      N[r] = saved+right[r+1]*temp;
      saved = left[j-r]*temp;
      }
    N[j] = saved;
    }
  }
```

理解了变量 temp 的意义之后，整个程序就很好理解了。

将 Open Cascade 中计算基函数的算法是不同的，将其源程序摘抄如下所示：

```
//=======================================================================
//function : Build BSpline Matrix
```

```
//purpose  : Builds the Bspline Matrix
//=======================================================================
Standard_Integer
BSplCLib::EvalBsplineBasis
//(const Standard_Integer             Side, // = 1 rigth side, -1 left side
(const Standard_Integer             , // = 1 rigth side, -1 left side
 const  Standard_Integer             DerivativeRequest,
 const  Standard_Integer             Order,
 const  TColStd_Array1OfReal&        FlatKnots,
 const  Standard_Real                Parameter,
 Standard_Integer&            FirstNonZeroBsplineIndex,
 math_Matrix&                 BsplineBasis)
{
  // the matrix must have at least DerivativeRequest + 1
  //   row and Order columns
  // the result are stored in the following way in
  // the Bspline matrix
  // Let i be the FirstNonZeroBsplineIndex and
  // t be the parameter value, k the order of the
  // knot vector, r the DerivativeRequest :
  //
  //   B (t)   B (t)                    B (t)
  //    i       i+1                      i+k-1
  //
  //    (1)     (1)                      (1)
  //   B (t)   B (t)                    B (t)
  //    i       i+1                      i+k-1
  //
  //
  //
  //
  //
  //    (r)     (r)                      (r)
  //   B (t)   B (t)                    B (t)
  //    i       i+1                      i+k-1
  //
  Standard_Integer
    ReturnCode,
  ii,
  pp,
  qq,
  ss,
  NumPoles,
  LocalRequest ;
//  ,Index ;
```

```
  Standard_Real NewParameter,
  Inverse,
  Factor,
  LocalInverse,
  Saved ;
// , *FlatKnotsArray ;

  ReturnCode = 0 ;
  FirstNonZeroBsplineIndex = 0 ;
  LocalRequest = DerivativeRequest ;
  if (DerivativeRequest >= Order) {
    LocalRequest = Order - 1 ;
  }

  if (BsplineBasis.LowerCol() != 1    ||
      BsplineBasis.UpperCol() < Order ||
      BsplineBasis.LowerRow() != 1    ||
      BsplineBasis.UpperRow() <= LocalRequest) {
    ReturnCode = 1;
    goto FINISH ;
  }
  NumPoles = FlatKnots.Upper() - FlatKnots.Lower() + 1 - Order ;
  BSplCLib::LocateParameter(Order - 1,
                FlatKnots,
                Parameter,
                Standard_False,
                Order,
                NumPoles+1,
                ii,
                            NewParameter) ;

  FirstNonZeroBsplineIndex = ii - Order + 1 ;

  BsplineBasis(1,1) = 1.0e0 ;
  LocalRequest = DerivativeRequest ;
  if (DerivativeRequest >= Order) {
    LocalRequest = Order - 1 ;
  }

  for (qq = 2 ; qq <= Order - LocalRequest ; qq++) {
    BsplineBasis(1,qq) = 0.0e0 ;

    for (pp = 1 ; pp <= qq - 1 ; pp++) {
```

```
      //
      // this should be always invertible if ii is correctly computed
      //
      Factor = (Parameter - FlatKnots(ii - qq + pp + 1))
    / (FlatKnots(ii + pp)   - FlatKnots(ii - qq + pp + 1)) ;
      Saved = Factor *    BsplineBasis(1,pp) ;
      BsplineBasis(1,pp) *= (1.0e0 - Factor) ;
      BsplineBasis(1,pp) += BsplineBasis(1,qq) ;
      BsplineBasis(1,qq) = Saved ;
    }
  }

  for (qq = Order - LocalRequest + 1 ; qq <= Order ; qq++) {

    for (pp = 1 ; pp <= qq - 1 ; pp++) {
      BsplineBasis(Order - qq + 2,pp) = BsplineBasis(1,pp) ;
    }
    BsplineBasis(1,qq) = 0.0e0 ;

    for (ss = Order - LocalRequest + 1 ; ss <= qq ; ss++) {
      BsplineBasis(Order - ss + 2,qq) = 0.0e0 ;
    }

    for (pp = 1 ; pp <= qq - 1 ; pp++) {
      Inverse = 1.0e0 / (FlatKnots(ii + pp)  - FlatKnots(ii - qq + pp + 1)) ;
      Factor  =  (Parameter - FlatKnots(ii - qq + pp + 1)) * Inverse ;
      Saved = Factor *                BsplineBasis(1,pp) ;
      BsplineBasis(1,pp) *= (1.0e0 - Factor) ;
      BsplineBasis(1,pp) += BsplineBasis(1,qq) ;
      BsplineBasis(1,qq) = Saved ;
      LocalInverse = (Standard_Real) (qq - 1) * Inverse ;

      for (ss = Order - LocalRequest + 1 ; ss <= qq ; ss++) {
    Saved = LocalInverse * BsplineBasis(Order - ss + 2, pp) ;
    BsplineBasis(Order - ss + 2, pp) *= - LocalInverse  ;
    BsplineBasis(Order - ss + 2, pp) +=   BsplineBasis(Order - ss + 2,qq) ;
    BsplineBasis(Order - ss + 2,qq) = Saved ;
      }
    }
  }
  FINISH :
    return (ReturnCode) ;
}
```

函数的作用是用来计算所有的基函数及其导数，并将结果以矩阵（数组）的形式保存。结合

二次基函数的推导方法，将述代码写成公式的形式。函数的参数及其描述如下表所示：

变量	描述
DerivativeRequest	导数的次数
Order	B 样条基函数的阶数(次数+1)
FlatKnots	节点矢量
Parameter	参数
FirstNonZeroBspline	第一个非零基函数的索引值
BsplineBasis	基函数值矩阵

当导数次数 DerivativeRequest 大于 B 样条基的阶数 Order 时，将计算导数的次数设置为 B 样条基的次数（Order-1）。程序代码如下所示：

```
LocalRequest = DerivativeRequest ;
if (DerivativeRequest >= Order) {
  LocalRequest = Order - 1 ;
}
```

对 B 样条基数计算结果矩阵 BsplineBasis 存储空间进行检查。若存储空间不足，则会退出，程序代码如下所示：

```
if (BsplineBasis.LowerCol() != 1    ||
    BsplineBasis.UpperCol() < Order ||
    BsplineBasis.LowerRow() != 1    ||
    BsplineBasis.UpperRow() <= LocalRequest) {
  ReturnCode = 1;
  goto FINISH ;
}
```

确定参数 Parameter 所在的节点区间的下标（索引值），程序代码如下所示：

```
NumPoles = FlatKnots.Upper() - FlatKnots.Lower() + 1 - Order ;
BSplCLib::LocateParameter(Order - 1,
              FlatKnots,
              Parameter,
              Standard_False,
              Order,
              NumPoles+1,
              ii,
              NewParameter) ;
```

确定参数 Parameter 所在区间的算法是用二分法搜索得到。程序代码如下所示：

```
//=======================================================================
//function : Hunt
//purpose  :
//=======================================================================
void BSplCLib::Hunt (const Array1OfReal& XX,
             const Standard_Real X,
             Standard_Integer&   Ilc)
{
  // replaced by simple dichotomy (RLE)
  Ilc = XX.Lower();
```

```
  const Standard_Real *px = &XX(Ilc);
  px -= Ilc;

  if (X < px[Ilc]) {
    Ilc--;
    return;
  }
  Standard_Integer Ihi = XX.Upper();
  if (X > px[Ihi]) {
    Ilc = Ihi + 1;
    return;
  }
  Standard_Integer Im;

  while (Ihi - Ilc != 1) {
    Im = (Ihi + Ilc) >> 1;
    if (X > px[Im]) Ilc = Im;
    else            Ihi = Im;
  }
}
```

确定参数所在区间$[u_i,u_{i+1})$后，可得到第一个非零基函数的索引值为 i-p；

```
  FirstNonZeroBsplineIndex = ii - Order + 1 ;
```

基函数计算的主要算法代码如下所示：

```
  BsplineBasis(1,1) = 1.0e0 ;
 for (qq = 2 ; qq <= Order - LocalRequest ; qq++) {
    BsplineBasis(1,qq) = 0.0e0 ;

    for (pp = 1 ; pp <= qq - 1 ; pp++) {
      //
      // this should be always invertible if ii is correctly computed
      //
      Factor = (Parameter - FlatKnots(ii - qq + pp + 1))
    / (FlatKnots(ii + pp)   - FlatKnots(ii - qq + pp + 1)) ;
      Saved = Factor *    BsplineBasis(1,pp) ;
      BsplineBasis(1,pp) *= (1.0e0 - Factor) ;
      BsplineBasis(1,pp) += BsplineBasis(1,qq) ;
      BsplineBasis(1,qq) = Saved ;
    }
  }
```

其中：

$$Factor = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i}$$

为节点区间$[u_i,u_{i+1})$上的基函数左边部分的系数；

$$(1-Factor)=\frac{u_{i+p}-u}{u_{i+p}-u_i}$$ 为节点区间$[u_{i-1},u_i)$上的基函数右边部分的系数；

六、程序示例 Sample Codes

将上述内容以一个简单示例程序来验证，程序代码如下所示：

```
/*
*    Copyright (c) 2013 eryar All Rights Reserved.
*
*        File    : Main.cpp
*        Author  : eryar@163.com
*        Date    : 2013-03-09
*        Version :
*
*    Description : Learn the B-Spline Curve library in the Open Cascade.
*
*/

#include <BSplCLib.hxx>
#include <math_Matrix.hxx>
#include <TColStd_Array1OfReal.hxx>
#include <TColStd_Array1OfInteger.hxx>
#include <Geom2d_BSplineCurve.hxx>

#pragma comment(lib, "TKernel.lib")
#pragma comment(lib, "TKMath.lib")
#pragma comment(lib, "TKG2d.lib")

int main(int argc, char* argv[])
{
    // Knot vector: [0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5]
    TColStd_Array1OfReal knotSeq(1, 11);

    knotSeq.Init(0);
    knotSeq.SetValue(1, 0);
    knotSeq.SetValue(2, 0);
    knotSeq.SetValue(3, 0);
    knotSeq.SetValue(4, 1);
    knotSeq.SetValue(5, 2);
    knotSeq.SetValue(6, 3);
    knotSeq.SetValue(7, 4);
    knotSeq.SetValue(8, 4);
```

```
knotSeq.SetValue(9, 5);
knotSeq.SetValue(10, 5);
knotSeq.SetValue(11, 5);

cout<<"Knot Sequence: [ ";
for (Standard_Integer i = 1; i <= knotSeq.Length(); i++)
{
    cout<<knotSeq.Value(i)<<" ";
}
cout<<"]"<<endl;

Standard_Integer knotsLen = BSplCLib::KnotsLength(knotSeq);
TColStd_Array1OfReal knots(1, knotsLen);
TColStd_Array1OfInteger mults(1, knotsLen);

// Test Knots, Mults and Knot sequence of BSplCLib.
BSplCLib::Knots(knotSeq, knots, mults);

cout<<"Knots: [ ";
for (Standard_Integer i = 1; i <= knots.Length(); i++)
{
    cout<<knots.Value(i)<<" ";
}
cout<<"]"<<endl;

cout<<"Multiplicity: [ ";
for (Standard_Integer i = 1; i <= mults.Length(); i++)
{
    cout<<mults.Value(i)<<" ";
}
cout<<"]"<<endl;

if (BSplCLib::KnotForm(knots, 1, knotsLen) == BSplCLib_Uniform)
{
    cout<<"Knots is uniform."<<endl;
}
else
{
    cout<<"Knots is non-uniform."<<endl;
}

Standard_Real rValue = 2.5;
Standard_Integer iOrder = 2+1;
Standard_Integer iFirstNonZeroIndex = 0;
```

```
    math_Matrix bSplineBasis(1, 1, 1, iOrder, 0);
    BSplCLib::EvalBsplineBasis(1, 0, iOrder, knotSeq, rValue, iFirstNonZeroIndex,
bSplineBasis);
    cout<<"First Non-Zero Basis index: "<<iFirstNonZeroIndex<<endl;
    cout<<bSplineBasis<<endl;

    return 0;
}
```

上述代码对节点矢量、重复度的概念的验证，并以一个实例计算所有非零基函数的值。程序输出为：

```
Knot Sequence: [ 0 0 0 1 2 3 4 4 5 5 5 ]
Knots: [ 0 1 2 3 4 5 ]
Multiplicity: [ 3 1 1 1 2 3 ]
Knots is uniform.
First Non-Zero Basis index: 3
math_Matrix of RowNumber = 1 and ColNumber = 3
math_Matrix ( 1, 1 ) = 0.125
math_Matrix ( 1, 2 ) = 0.75
math_Matrix ( 1, 3 ) = 0.125

Press any key to continue . . .
```

七、结论 Conclusion

通过学习《The NURBS Book》并给合 Open Cascade 的源程序，理论联系实际，使对 NURBS 的学习更轻松。

根据 ***B*** 样条基的递推公式，B 样条曲线的局部性是通过节点来具体实现的。与 Bezier 曲线不同的就是增加了节点这个参数。根据 Cox-deBoor 递推公式亲自推导出一次、二次、三次 B 样条基函数，可以加深对 B 样条曲线的理解。

计算给定节点矢量、次数及参数，计算参数所在区间上所有非零基函数算法的步骤为：

- 通过二分法查找出参数所在的节点区间；
- 根据 B 样条基的局部支撑性，计算出所在节点区间上所有非零基函数；

八、致谢 Acknowledgments

感谢晓天的支持与鼓励。

九、参考文献 Bibliography

1. 赵罡，穆国旺，王拉柱译 Les Piegl，Wayne Tiller The NURBS Book(Second Edition) ***2010*** 清华大学出版社
2. 莫容，常智勇 计算机辅助几何造型技术 ***2009*** 科学出版社
3. 王仁宏，李崇君，朱春钢 计算几何教程 ***2008*** 科学出版社